Instrumentação

2019

4ª. aula

Características Dinâmicas

Modelo Matemático generalizado de um sistema de medida

O modelo matemático mais usado é a *"Equação diferencial linear ordinária com coeficientes constantes"*

- Assume-se que a relação entre qq entrada q_i e a saída q_0 pode, sob adequadas hipóteses simplificadoras, ser colocado na forma:

$$a_n \frac{d^n}{dt^n} q_0 + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} q_0 + \ \ldots + a_1 \frac{d}{dt} q_0 + a_0 q_0 = b_m \frac{d^m}{dt^m} q_i + b_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} q_i + \cdots + b_1 \frac{d}{dt} q_i + b_0 q_i$$

Modelo Matemático

- O modelo proposto é amplo pois uma eq. diferencial permite descrever qualquer função. No entanto podemos usar uma simplificação mantendo a funcionalidade:

$$a_n \frac{d^n}{dt^n} q_0 + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} q_0 + \ \ldots + a_1 \frac{d}{dt} q_0 + a_0 q_0 = f(t)$$

Em que:

- q_0 é a variável para a qual se quer a solução
- q_i é a variável independente, usualmente o tempo t (s)
- a_n são os coeficientes e representam parâmetros do sistema ou relações entre eles.
- *f(t)* é a função que faz o sistema reagir e é denominada *função perturbadora*

Solução da Equação diferencial

Método clássico

- Solução:
  - $q_0 = q_p + q_h$
- Em que:
  - q_p = Solução particular ou **regime permanente**, depende da função perturbadora.
  - q_h = Solução homogênea ou **transiente**, não depende da função perturbadora e sempre pode ser encontrada.
- Estas soluções são encontradas de forma independente .

Solução transiente

- É a solução da equação:

$$a_n \frac{d^n}{dt^n} q_0 + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} q_0 + \ \ldots + a_1 \frac{d}{dt} q_0 + a_0 q_0 = 0$$

- Fisicamente corresponde à reação livre do sistema quando recebe algum estímulo externo.
- A solução terá *n* constantes a determinar, e inicia-se pela solução da equação característica:

$$a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ \ldots + a_1 D + a_0 = 0$$

Solução transiente

Solução da equação característica

- Polinômio de ordem *n* terá *n* raízes (r_i , $i=1,n$) que podem ser reais ou complexas.
  - Cada raiz real não repetida colabora com uma parcela da solução homogênea:

$$q_{hi} = C_i . e^{r_i . t}$$

  - Cada raiz real repetida p vezes, colabora com p parcelas da solução homogênea:

$$q_{hi} = \left(C_{i0} + C_{i1} t + C_{i2} t^2 + \cdots + C_{i(p-1)} t^{p-1}\right) . e^{r_i . t}$$

Solução transiente

- Cada par de raízes complexas, $r_{ci} = a \pm b.i$, não repetidas, colabora com uma parcela da solução homogênea:

$$q_{h\ ci} = C_i . e^{a.t} sen(bt + \varphi)$$

- Em que
- C_i e Φ são constantes a determinar, e
- b sempre positivo

- Cada par de raízes complexas repetidas ***p*** vezes, colabora com ***p*** parcelas da solução homogênea:

$$q_{hi} = \left(C_{i0} . e^{a.t} sen(bt + \varphi_0) + C_{i1} . t . e^{a.t} sen(bt + \varphi_1) + \cdots + C_{i(p-1)} t^{p-1} e^{a.t} sen(bt + \varphi_{p-1})\right)$$

Solução transiente

- A solução transiente será a soma de todas as soluções parciais devidas a cada raiz obtida.

$$q_h = \sum C_i \,.\, e^{r_i.t} + \sum C_i \,.\, e^{a.t} sen(bt + \varphi) +$$

$$+\left(C_{i0} + C_{i1}t + C_{i2}t^2 + \cdots + C_{i(p-1)}t^{p-1}\right).\, e^{r_i.t} +$$

$$+\left(C_{i0}.\, e^{a.t} sen(bt + \varphi_0) + C_{i1}.\, t.\, e^{a.t} sen(bt + \varphi_1) + \cdots + C_{i(p-1)}t^{p-1} e^{a.t} sen(bt + \varphi_{p-1})\right)$$

Solução de Regime Permanente

A solução particular será uma combinação linear da função perturbadora e suas derivadas.

Útil quando a função perturbadora tiver número finito de derivadas

- 1º exemplo: $f(t) = 3x^2 + 5x + 4$
- $q_p = A.x^2 + Bx + C$

- 2º exemplo: $f(t) = 3.\text{sen}(5\ x)$
- $q_p = A.\text{sen}(5x) + B.\cos(5x)$

Em que A, B , C etc. são constantes a determinar.

Exemplo:

Um sistema é representado pelo modelo:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 5\frac{dy}{dt} + 6y = 3t^3$$

Encontrar uma solução completa para o sistema, quando sujeito às condições de contorno:

- t = 0 → y = 0
- t = 2 → y = 10

Solução:

Transiente: As raízes da equação característica são:

$$r_1 = 2 \quad \text{e} \quad r_2 = 3$$

$$y_h = C_1.e^{2.t} + C_2.e^{3.t}$$

Exemplo (continuação)

Transiente:

- Solução de regime permanente:
  - $f(t) = 3.t^3$
  - $Df(t) = 9.t^2$
  - $D^2f(t) = 18.t$
  - $D^3f(t) = 18$

  $y_p = At^3 + Bt^2 + Ct + D$

  - Substituindo na equação completa:

$$\frac{d^2(At^3 + Bt^2 + Ct + D)}{dt^2} - 5\frac{d(At^3 + Bt^2 + Ct + D)}{dt} + 6(At^3 + Bt^2 + Ct + D) = 3t^3$$

$$(6At + 2B) - 5(3At^2 + 2Bt + C) + 6(At^3 + Bt^2 + Ct + D) = 3t^3$$

$$6At^3 + (-15A + 6B).t^2 + (6A - 10B + 6C).t + (2B - 5C + 6D) = 3t^3$$

Exemplo (continuação)

- Da igualdade de polinômios
  - 6.A = 3
  - -15.A + 6.B = 0
  - 6.A -10.B + 6.C = 0
  - 2.B – 5.C + 6D = 0
- e então:
  - A = ½, B = 5/4, C = 19/12 e D = 65/72

A solução de regime permanente é:

$$y_p = \frac{1}{2}t^3 + \frac{5}{4}t^2 + \frac{19}{12}t + \frac{65}{72}$$

Solução Geral

- É a soma das duas soluções parciais obtidas:

$$y = C_1.e^{2.t} + C_2.e^{3.t} + \frac{1}{2}t^3 + \frac{5}{4}t^2 + \frac{19}{12}t + \frac{65}{72}$$

Os valores de C1 e C2 são obtidos pelas condições de contorno:

$t = 0 \rightarrow y = 0$

$C_1 + C_2 = -0{,}902778$

$t = 2 \rightarrow y = 10$

$54{,}598\ C_1 + 403{,}429\ C_2 = -3{,}06944$

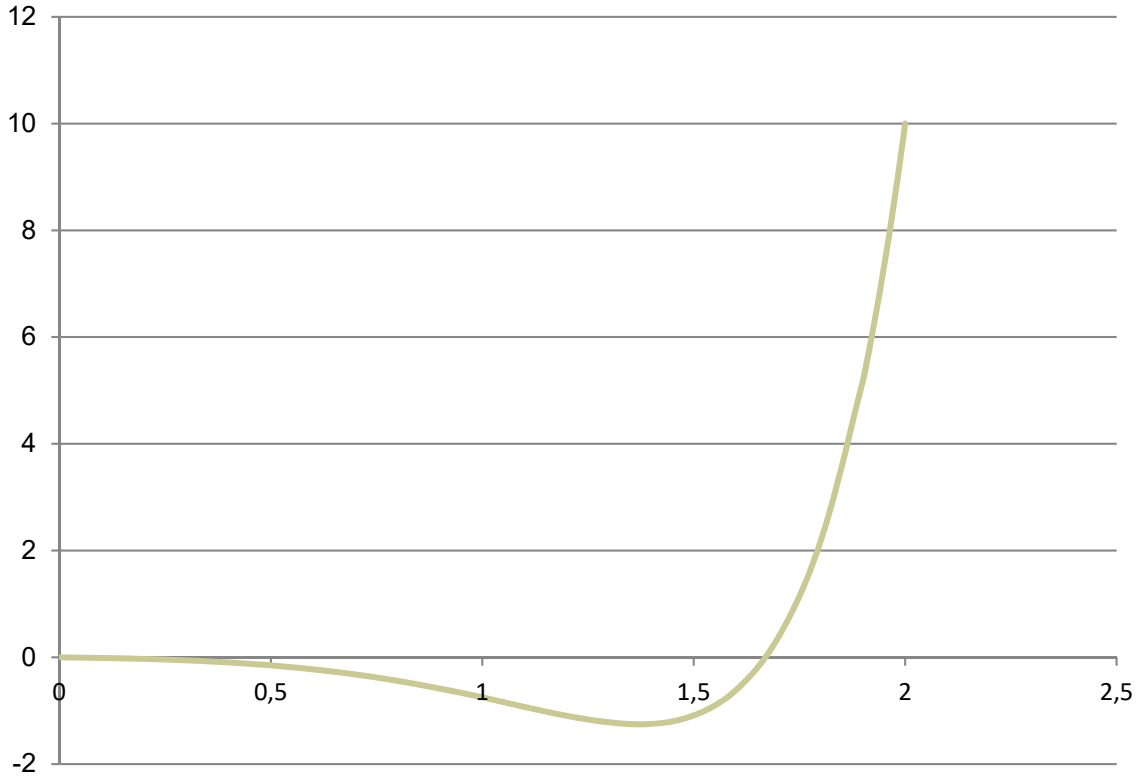
$C_1 = -1{,}03526$

$C_2 = 0{,}1325$

Solução Geral

$$-1{,}03526.\,e^{2.t} + 0{,}1325.\,e^{3.t} + \frac{1}{2}t^3 + \frac{5}{4}t^2 + \frac{19}{12}t + \frac{65}{72}$$

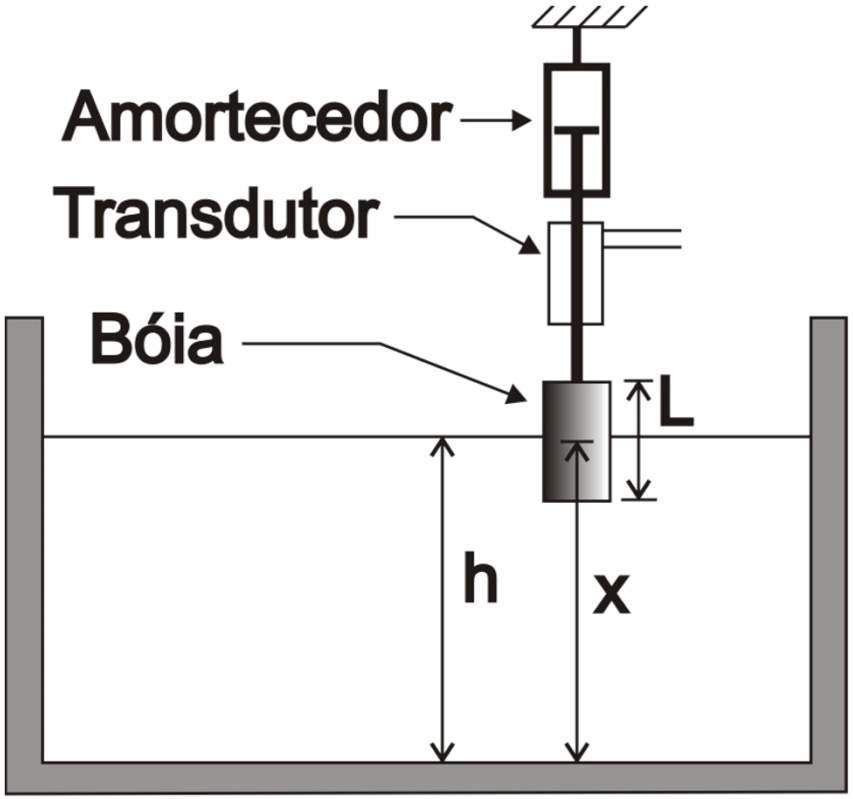
Em forma gráfica:



Exemplo de desenvolvimento de um modelo

Sistema mecânico de medida de nível

Verificar as características dinâmica de um sistema de medida de nível com boia cilíndrica de área A_b.



Sistema mecânico de medida de nível

Hipóteses simplificadoras

- Amortecedor
  - $F_{am} = - B. V$

- Boia
  - Força na boia é a força de empuxo
  - $Fb = \gamma.A_b.(h - x)$

- Transdutor não oferece resistência ao movimento.

Sistema mecânico de medida de nível

Equacionamento

- 2ª Lei de Newton
- $F_{emp} + F_{am} = M_b.a$
- ou
- $\gamma.A_b.(h - x) - B.\ V = M_b.a$

$$M_b.\frac{d^2x}{dt^2} + B.\frac{dx}{dt} + \gamma.A_b.x = \gamma.A_b.h$$

Sistema mecânico de medida de nível

Análise do modelo

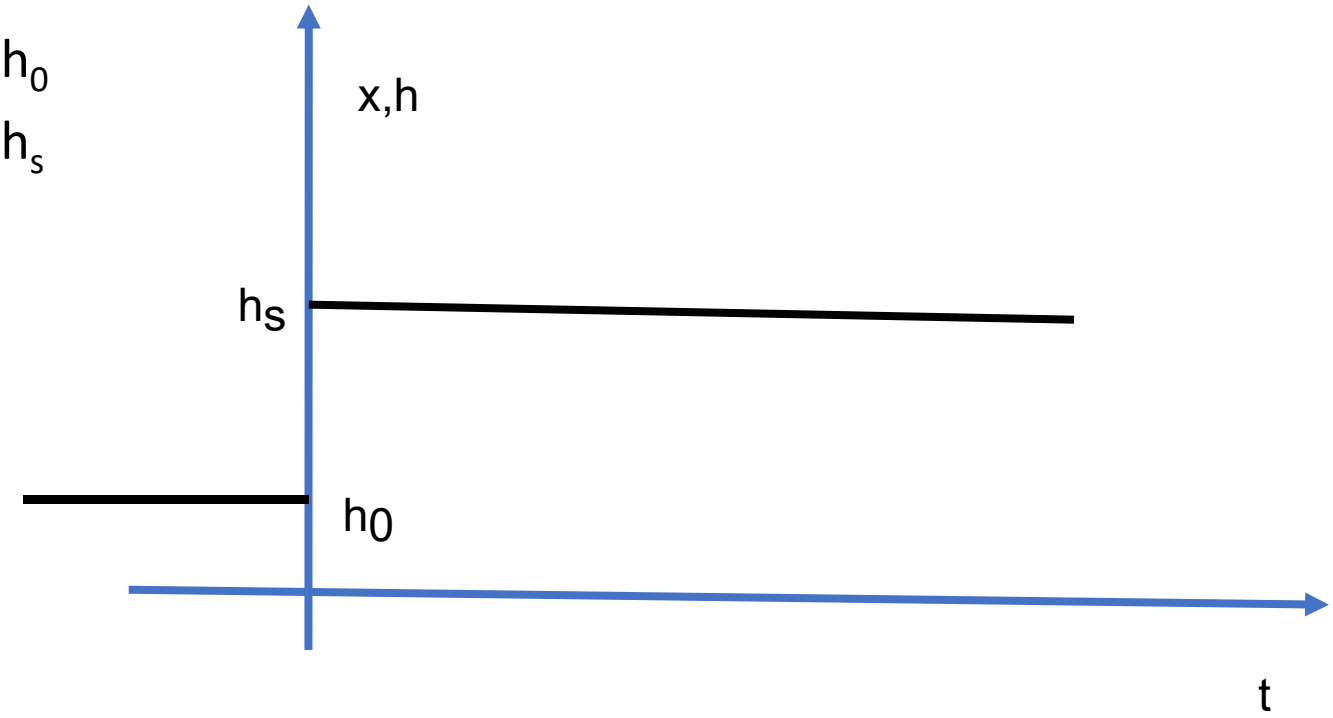
- Como nosso sistema responde à variação do nível da água?

- Teste com entradas padrões
  - Função degrau
  - Função rampa
  - Resposta de frequência (função senoidal)

Entrada Padrão

Função degrau

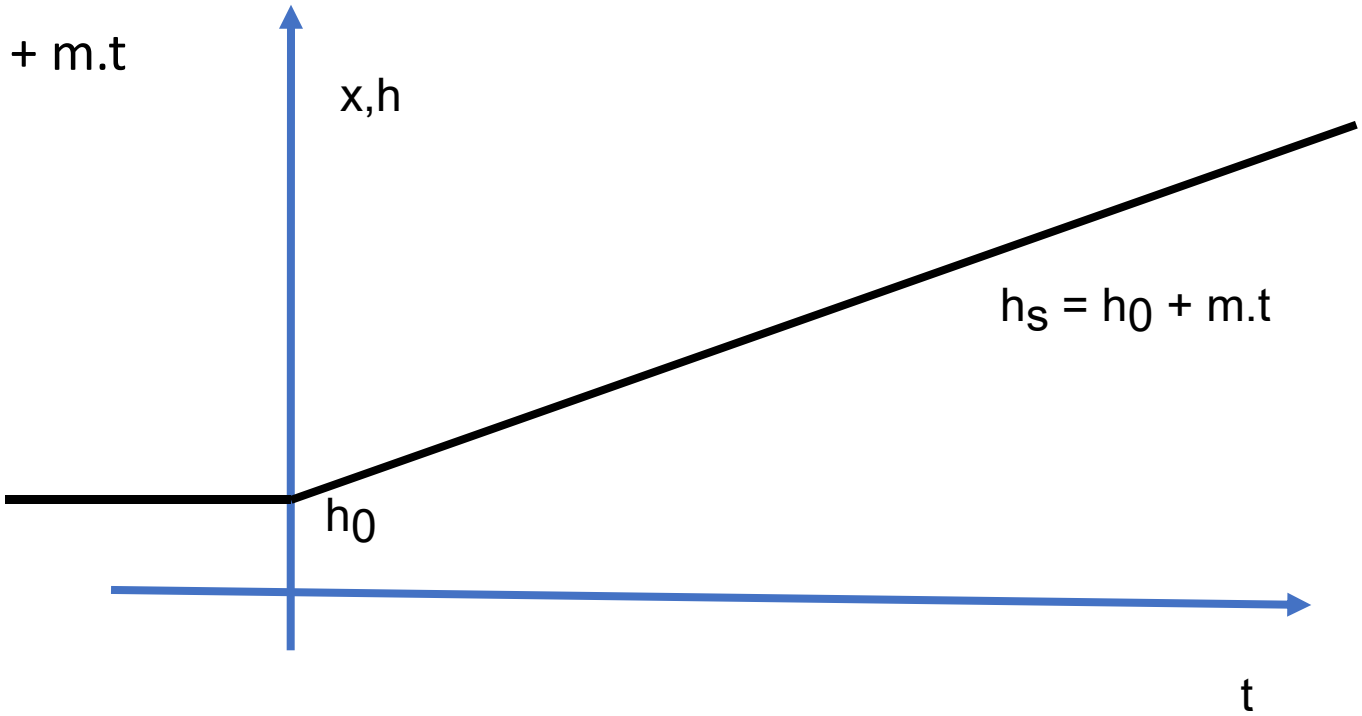
- $t < 0 \quad h = h_0$
- $t \geq 0 \quad h = h_s$



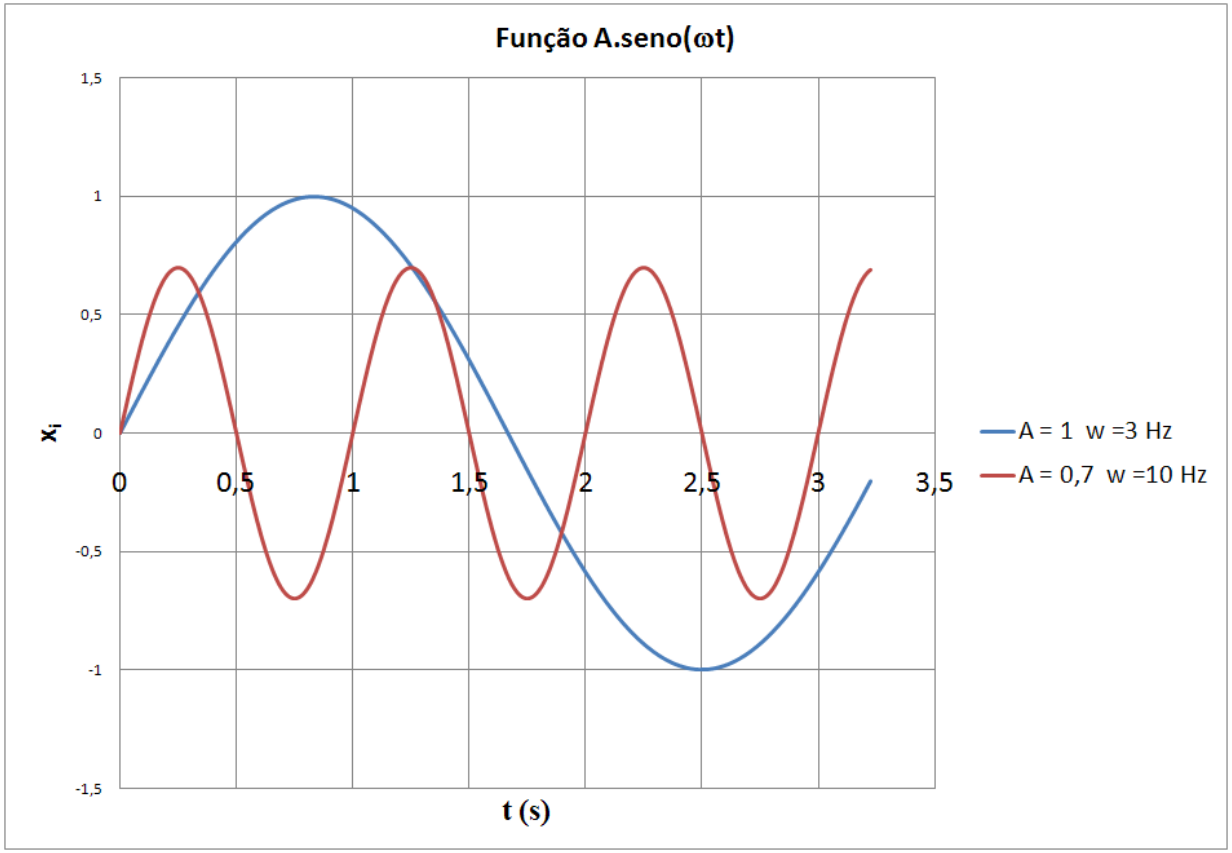
Entrada Padrão

Função Rampa

- $t < 0 \quad h = h_0$
- $t \geq 0 \quad h_s = h_0 + m.t$



Entrada Padrão

Função Senoidal

X = A.sen (ω . t) → só interessa a condição de regime permanente.