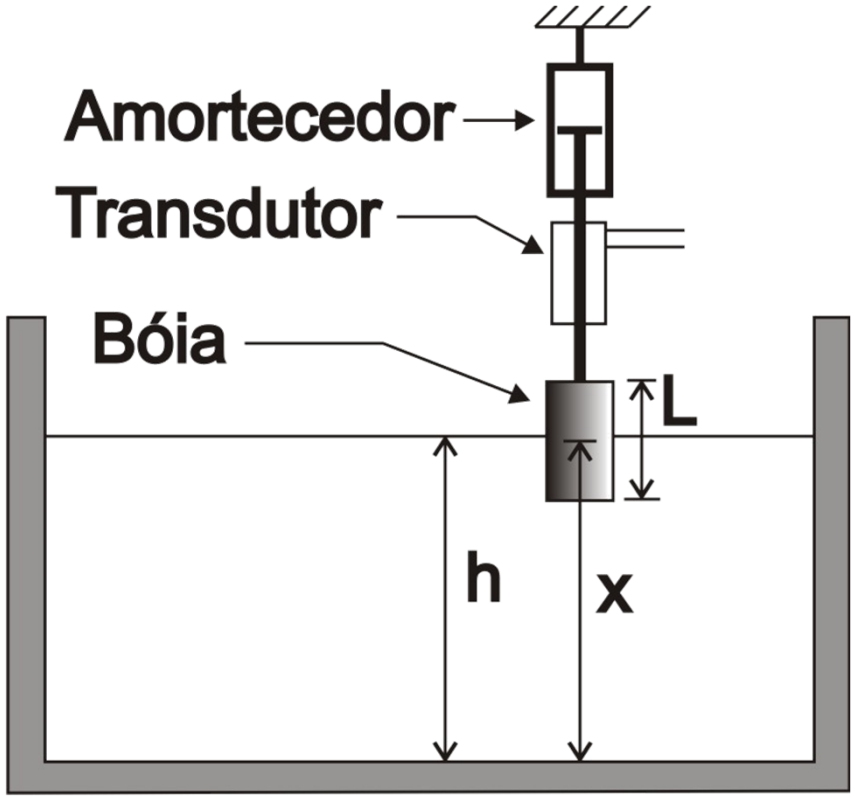
Instrumentação

5ª. Aula

2019

Exemplo: Sistema mecânico de medida de nível

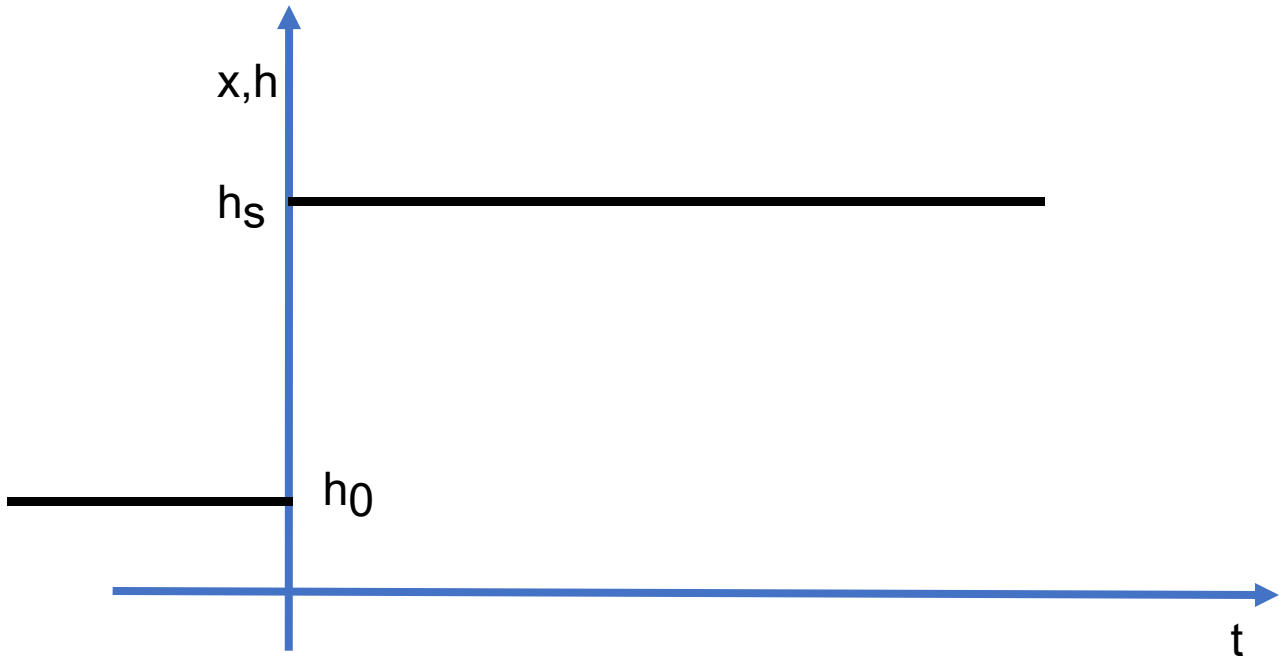
Verificar as características dinâmica de um sistema de medida de nível com boia cilíndrica de área A_b.



Características Dinâmicas

Sistemas de 1ª. ordem

- A medida de nível com bóia de peso desprezível, associada a movimentos lentos.
- Resposta a uma função Degrau:



Função degrau

- Matematicamente a função degrau é:
- $t < 0 \quad h = h_0$
- $t \geq 0 \quad h = h_s$
- Então a equação diferencial fica:

$$(\tau.D + 1)x = h_s$$

A solução transiente é:

$$x_h = C_1.e^{-\frac{t}{\tau}}$$

A solução de regime permanente é:

- $x_p = A_1$ (constante a determinar)
- Da equação diferencial:
- $A_1 = h_s$
- ou
- $x_p = h_s$

e a solução completa fica:

$$x = C_1.e^{-\frac{t}{\tau}} + h_s$$

Da condição de contorno t = 0 → x = h0

$$C_1 = h_0 - h_s$$

Substituindo na solução:

$$x = (h_0 - h_s)e^{-\frac{t}{\tau}} + h_s$$

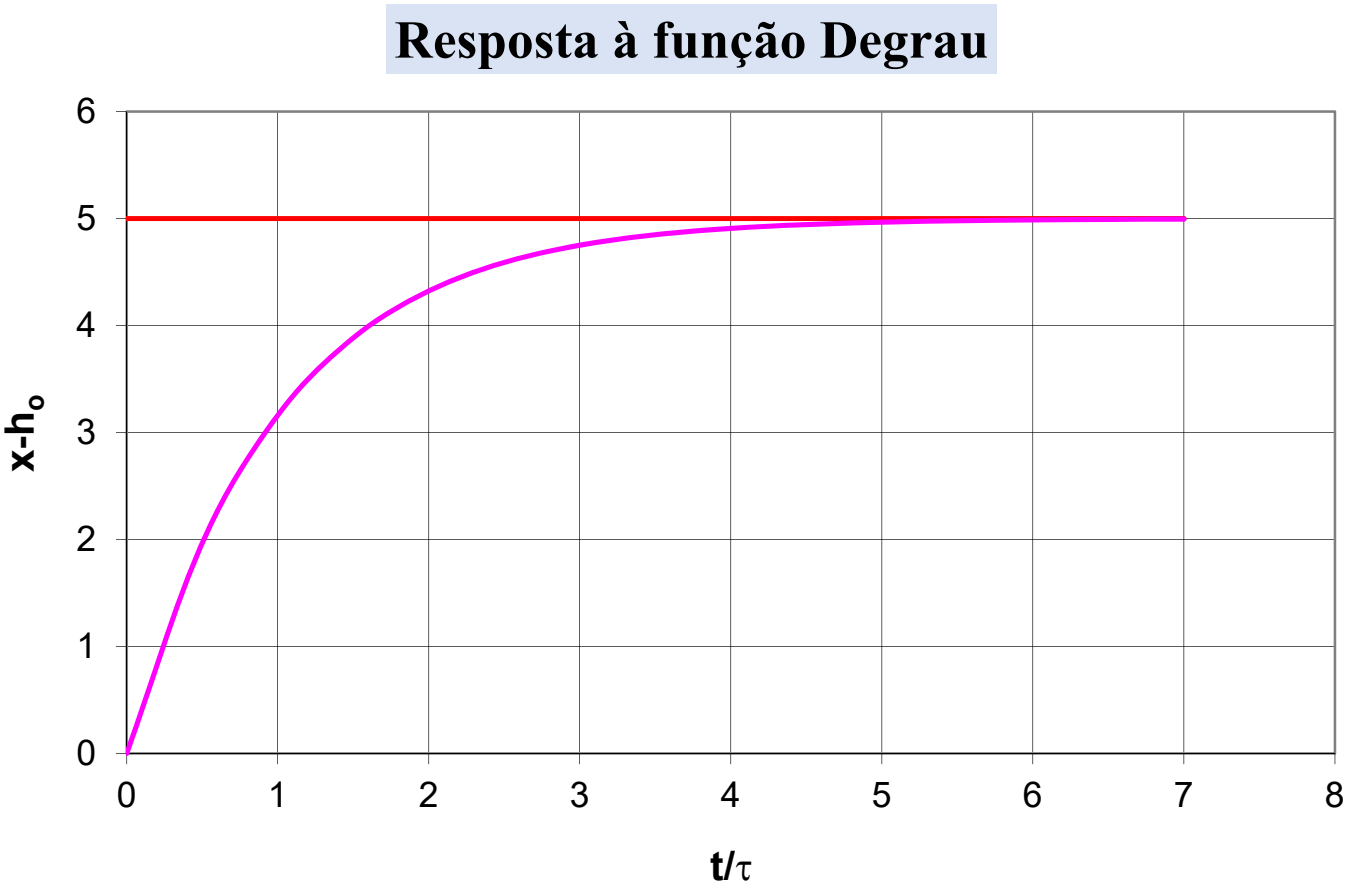
- Subtraindo h_0 de ambos os lados:

$$x - h_0 = (h_0 - h_s)e^{-\frac{t}{\tau}} + h_s - h_0$$

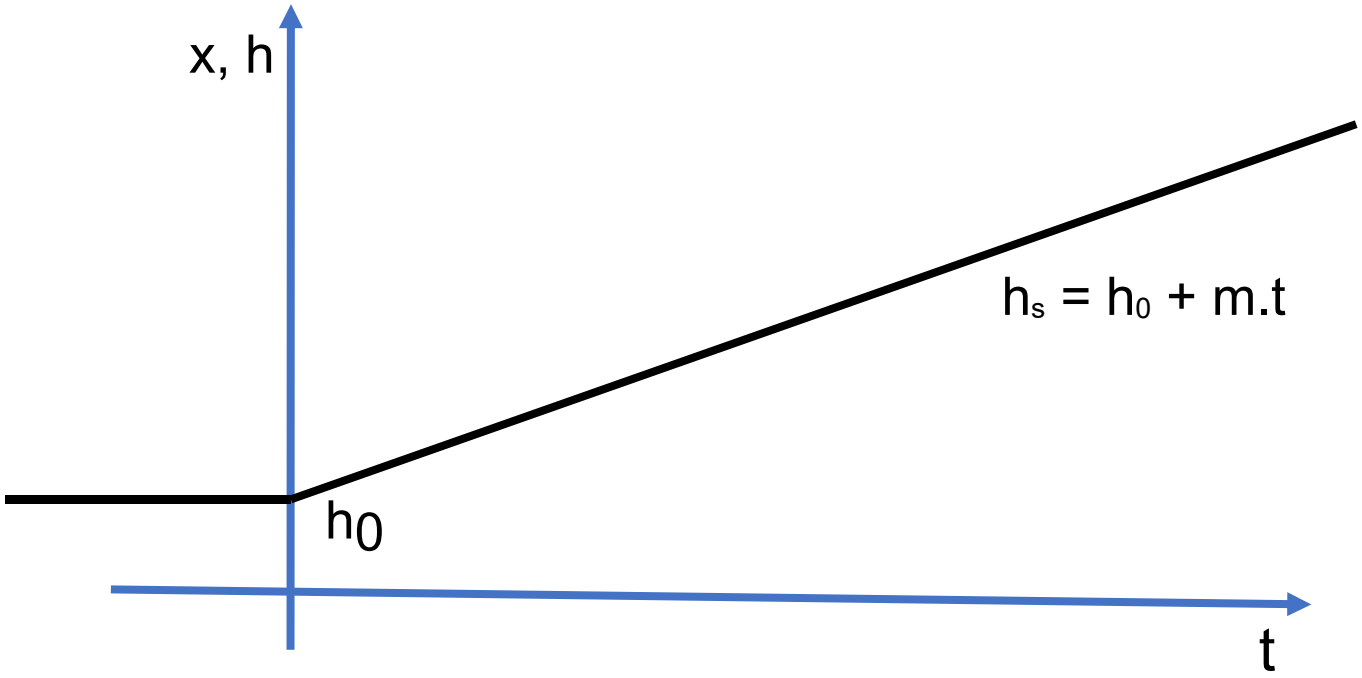
- Colocando o degrau em evidência:

$$x - h_0 = (h_s - h_0)\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Solução em forma gráfica



Resposta à função rampa



Função rampa

- Matematicamente a função rampa é:
- $t < 0 \quad h = h0$
- $t \geq 0 \quad h = ho+m.t$
- Então a equação diferencial fica:

$$(\tau.D+1)x = h_0 + m.t$$

A solução transiente é a mesma anterior:

$$x_h = C_1.e^{-\frac{t}{\tau}}$$

A solução de regime permanente é uma reta:

- $x_p = A_1.t + B_1$ (duas constantes a determinar)
- Da equação diferencial completa:
- $\tau.A_1 + A_1.t + B_1 = h_0 + m.t$
- De onde
- $A_1 = m$
- $B_1 = h_0 - \tau.m$

e a solução completa fica:

$$x = C_1.e^{-\frac{t}{\tau}} + m.t + h_0 - \tau.m$$

Da condição de contorno $t = 0 \rightarrow x = h_0$

$$C_1 = \tau.m$$

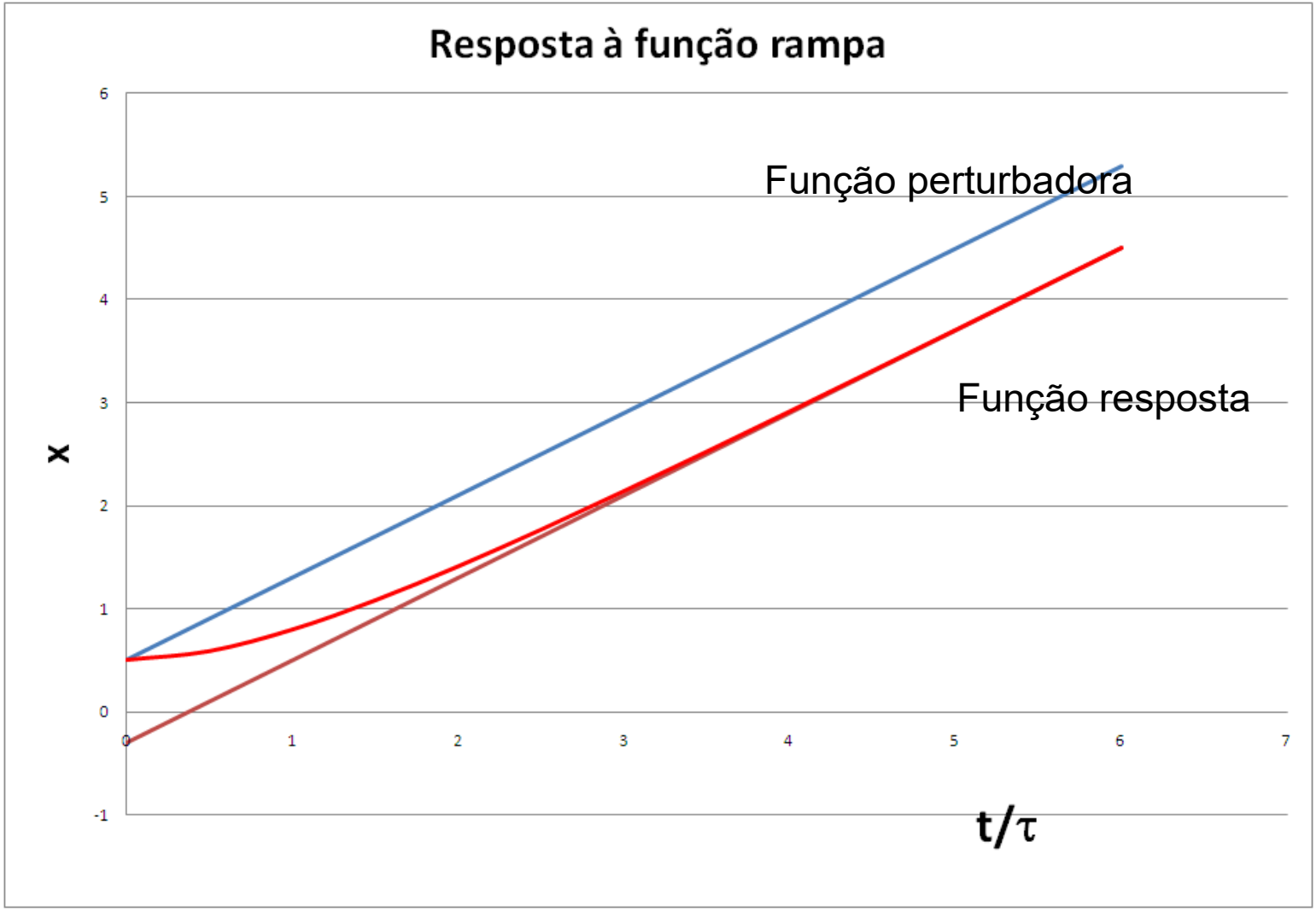
Verifica-se que a solução converge para uma reta paralela à função perturbadora.

$$x = \tau.m.e^{-\frac{t}{\tau}} + m.t + h_0 - \tau.m$$

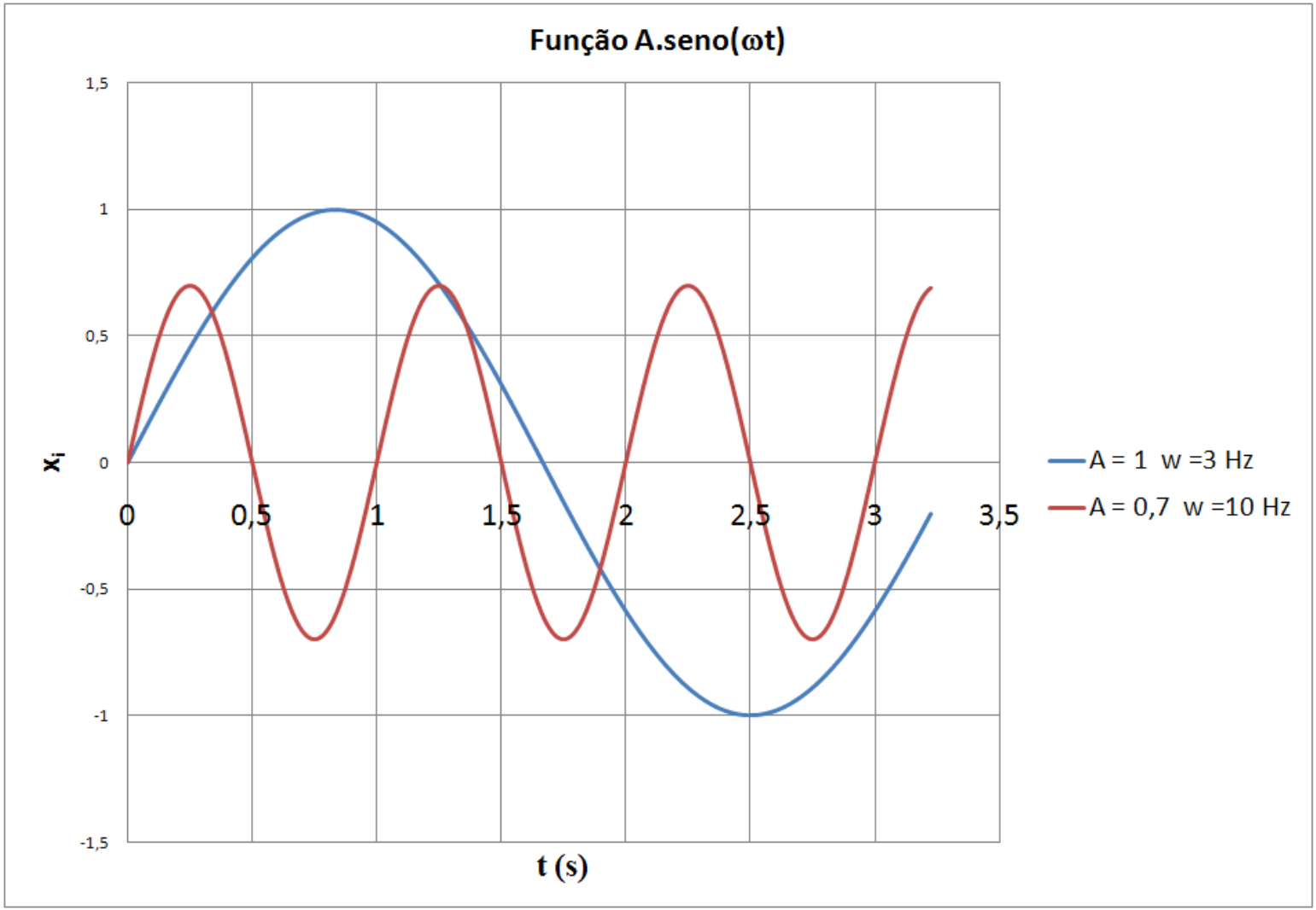
Ou em número de constantes de tempo:

$$x = \tau.m.e^{-\frac{t}{\tau}} + \tau.m.(\frac{t}{\tau}) + h_0 - \tau.m$$

Solução em forma gráfica



Resposta à função Seno



Função Seno

Matematicamente a função Seno é:

Para qualquer t ➔ $h = A_i.sen(\omega.t)$

Então a equação diferencial fica:

$$(\tau.D+1)x = A_i.sen(\omega.t)$$

- A solução transiente é a mesma anterior e representa a variação na resposta de frequência até o regime permanente, não tendo interesse neste caso.
- **Só interessa a solução permanente.**

A solução de regime permanente é uma combinação linear da função perturbadora e suas derivadas:

$$x_p = C_1.sen(wt) + C_2.cos(wt)$$

Com duas constantes a determinar: $\boldsymbol{C_1}$ e $\boldsymbol{C_2}$

Substituindo na equação diferencial completa:

$$\tau.\omega.C_1 \cos(\omega t) - \tau.\omega.C_2 \, sen(\omega t) + C_1.sen(\omega t) + C_2.cos(\omega t) = A_1.sen(\omega t)$$

Fornecendo o sistema de duas equações a duas incógnitas:

- $C_1 - \tau.\omega.C_2 = A_1$
- $\tau.\omega.C_1 + C_2 = 0$

Solução por meio da regra de Cramer

$$\Delta = \begin{vmatrix} \tau\omega & 1 \\ 1 & -\tau\omega \end{vmatrix} = 1 + (\tau\omega)^2$$

$$\Delta C_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ A_1 & -\tau\omega \end{vmatrix} = A_1$$

$$C_1 = \frac{A_1}{1 + (\tau\omega)^2}$$

$$\Delta C_2 = \begin{vmatrix} \tau\omega & 0 \\ 1 & A_1 \end{vmatrix} = -\tau\omega . A_1$$

$$C_2 = \frac{-\tau\omega . A_1}{1 + (\tau\omega)^2}$$

Solução de regime permanente

$$x_p = \frac{A_1}{1+(\tau\omega)^2} sen(\omega t) - \frac{\tau\omega . A_1}{1+(\tau\omega)^2} \cos(\omega t)$$

- Que pode ser modificado para

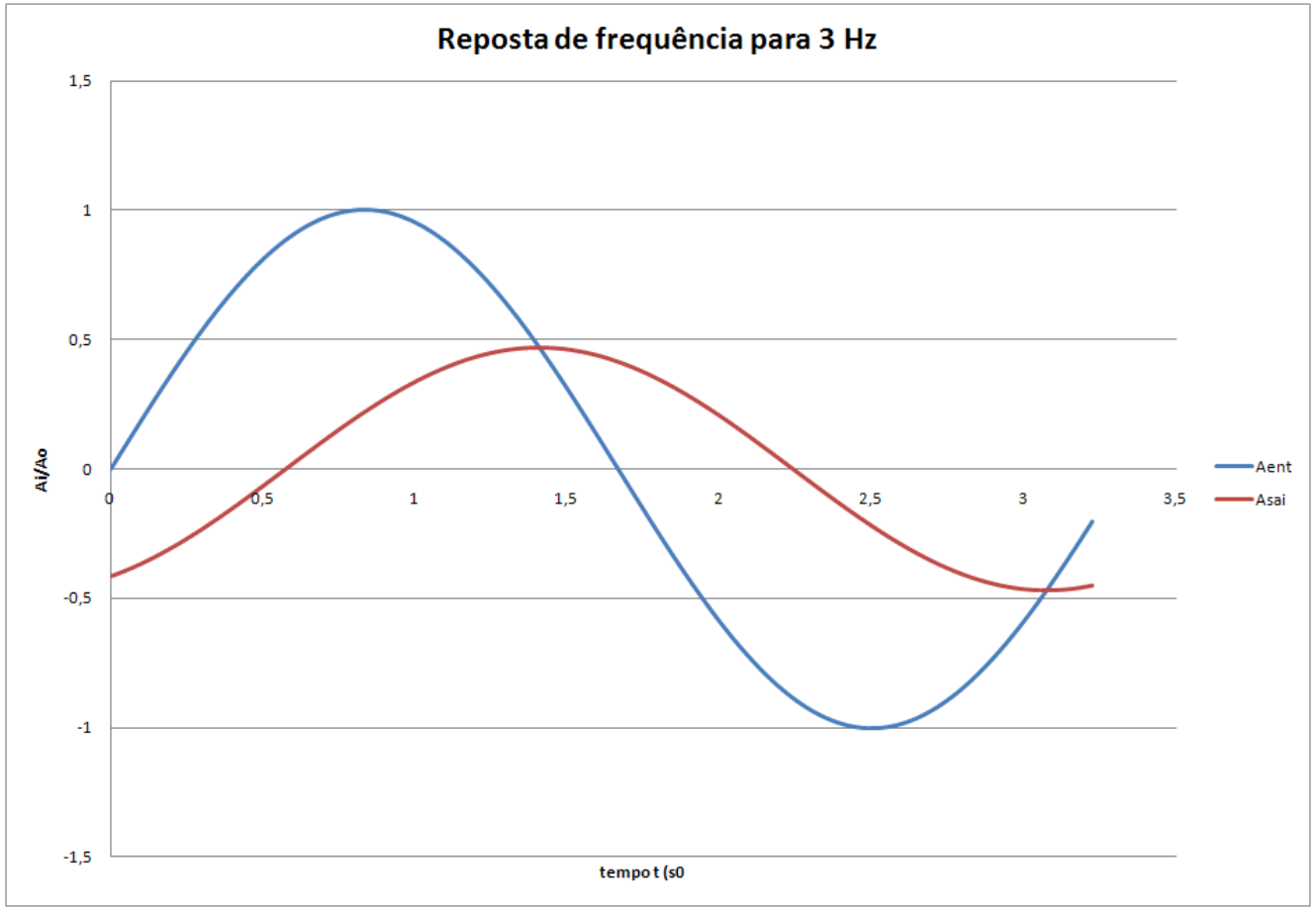
$$x_p = A_0 sen(\omega t + \phi)$$

- Em que:

$$A_0 = \frac{A_1}{1+(\tau\omega)^2} \sqrt{1+(\tau\omega)^2} = \frac{A_1}{\sqrt{1+(\tau\omega)^2}}$$

$$\phi = arctg(-\tau\omega) = -arctg(\tau\omega)$$

Solução em forma gráfica



Solução em forma gráfica

Função de Transferência

- Operacional – É uma forma de descrever o sistema através de blocos. Para sistemas de 1ª ordem a função de transferência operacional é:

$$\frac{x}{h}(D) = \frac{1}{\tau.D+1}$$

- Senoidal – É obtida da operacional substituindo o operador D por *i*.ω *i* é o versor imaginário:

$$\frac{x}{h}(i\omega) = \frac{1}{\tau.i\omega+1}$$

Função de transferência senoidal

Permite avaliar a resposta de frequência do sistema:

$$\frac{A_i}{A_0} = \left| \frac{1}{\tau . i\omega + 1} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}}$$

$$\phi = angulo(\frac{1}{\tau . i\omega + 1}) = angulo(1) - angulo(\tau . i\omega + 1)$$

$$\phi = o - \arctan(\tau . \omega) = -\arctan(\tau . \omega)$$

Sistemas de 2ª Ordem

- O sistema de medida de nível tem boia com massa e sofre acelerações não desprezíveis:

$$M_b.\frac{d^2x}{dt^2}+B.\frac{dx}{dt}+\gamma.A_b.x=\gamma.A_b.h$$

Definindo:

$$\xi=\frac{B}{2\sqrt{\gamma.A_b.M_b}}$$

Razão de amortecimento

$$\omega_n=\sqrt{\frac{\gamma.A_b}{M_b}}$$

Frequência natural livre

Sistemas de 2ª ordem

- A equação pode ser escrita como:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2.\xi.\omega_n \frac{dx}{dt} + \omega_n^2.x = \omega_n^2.h$$

- Que representa todos os sistemas de 2ª ordem
- As características dinâmicas são avaliadas usando as entradas padronizadas: degrau, rampa e senoide.

Resposta à função degrau

- Colocando o eixo iniciando na superfície
- $t < 0 \quad h = 0$
- $t \geq 0 \quad h = h_s$
- Então a equação diferencial fica:

$$D^2 x + 2.\xi.\omega_n Dx + \omega_n^2.x = \omega_n^2.h_i$$

- A solução transiente é dada pelas raízes da equação característica

$$D^2 + 2.\xi.\omega_n D + \omega_n^2 = 0$$

Solução da equação característica

$$\Delta = 4\xi^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2$$

$$\sqrt{\Delta} = 2\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

A solução depende do valor de x

- Se $\xi > 1$ temos duas raízes reais distintas e o sistema é super amortecido
- Se x > 0 temos duas raízes reais repetidas e o sistema é criticamente amortecido
- Se $\xi > 1$ temos duas raízes complexas conjugadas e o sistema é sub amortecido

Sistema amortecido

- $\xi > 1$

$$r_1 = \frac{-2\xi\omega_n + 2\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}}{2} = -\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

$$r_2 = \frac{-2\xi\omega_n - 2\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}}{2} = -\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

- Então a solução transiente é:

$$x_h = C_1.e^{(-\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}).t} + C_2.e^{(-\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}).t}$$

Sistema criticamente amortecido

- ξ =1

$$r_1 = r_2 = \frac{-2\xi\omega_n}{2} = -\xi\omega_n$$

- Então a solução transiente é:

$$x_h = C_1.e^{-\xi\omega_n.t} + C_2.t.e^{-\xi\omega_n.t}$$

Sistema subamortecido

- $\xi < 1$

$$r_1 = \frac{-2\xi\omega_n + 2\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}}{2} = -\xi\omega_n + \omega_n.i.\sqrt{1-\xi^2}$$

$$r_2 = \frac{-2\xi\omega_n - 2\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}}{2} = -\xi\omega_n - \omega_n.i.\sqrt{1-\xi^2}$$

- Então a solução transiente é:

$$x_h = C_1.e^{(-\xi\omega_n + \omega_n.i.\sqrt{1-\xi^2}).t} + C_2.e^{(-\xi\omega_n - \omega_n.i.\sqrt{1-\xi^2}).t}$$

ou

$$x_h = C.e^{(-\xi\omega_n).t}.sen(\omega_n.\sqrt{1-\xi^2}t + \phi)$$

Solução geral

- Regime permanente
- A solução é uma constante a determinar A_i
- Substituindo na eq. Diferencial → $A_i = h_s$
- e

$$x = C_1.e^{(-\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2-1}).t} + C_2.e^{(-\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2-1}).t} + h_s$$

$$x = C_1.e^{-\xi\omega_n.t} + C_2.t.e^{-\xi\omega_n.t} + h_s$$

$$x = C.e^{(-\xi\omega_n).t}.sen(\omega_n.\sqrt{1-\xi^2}t + \phi) + h_s$$

Condições de contorno
Sistema super amortecido

- t = 0 → x = 0 (origem na superfície h_0)
- t = 0 → dx/dt = 0
- Para ξ >1

$C_1 + C_2 = h_s$ e

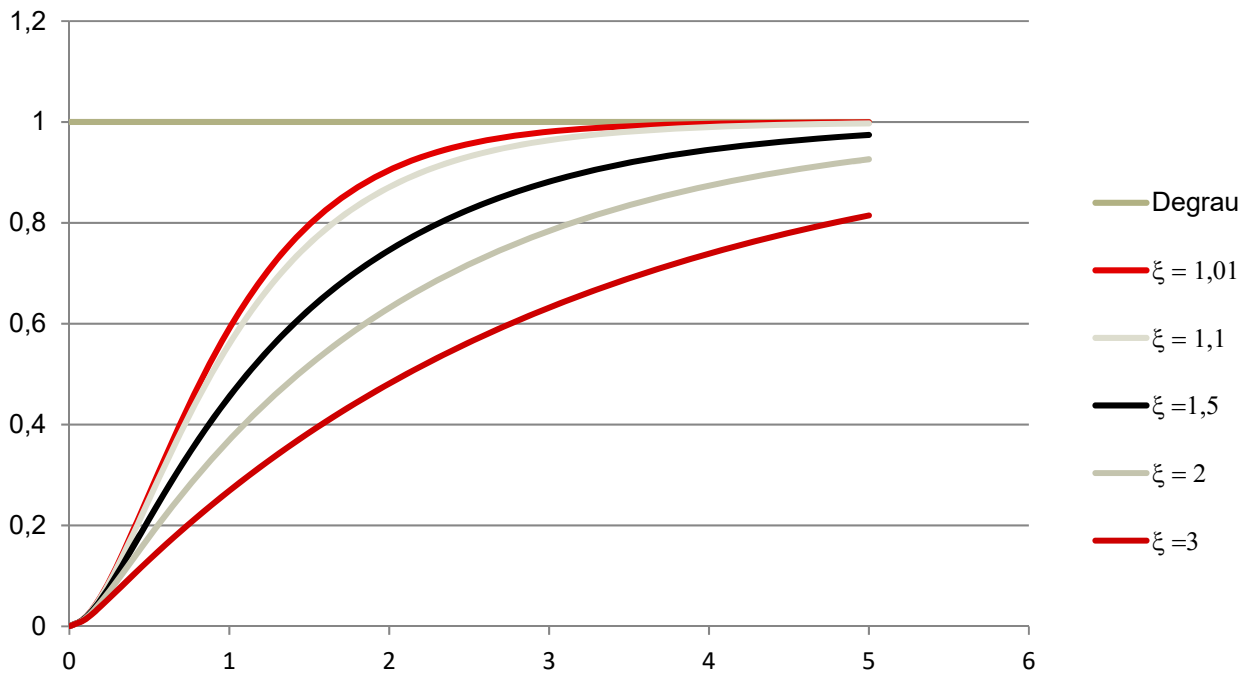
$$(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})C_1 + (-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})C_2 = 0$$

$$C_1 = h_s \frac{-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}}{2\sqrt{\xi^2 - 1}}$$

$$C_2 = h_s \frac{\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}}{2\sqrt{\xi^2 - 1}}$$

A solução geral é apresentada abaixo seguida da forma gráfica da solução

$$\frac{x}{h_s} = \frac{-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} . e^{(-\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}).t} + \frac{\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} . e^{(-\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}).t} + 1$$



Condições de contorno aplicadas ao sistema sub amortecido

- t = 0 → x = 0
- t = 0 → dx/dt = 0
- *C.sen(ϕ)* = -h_s

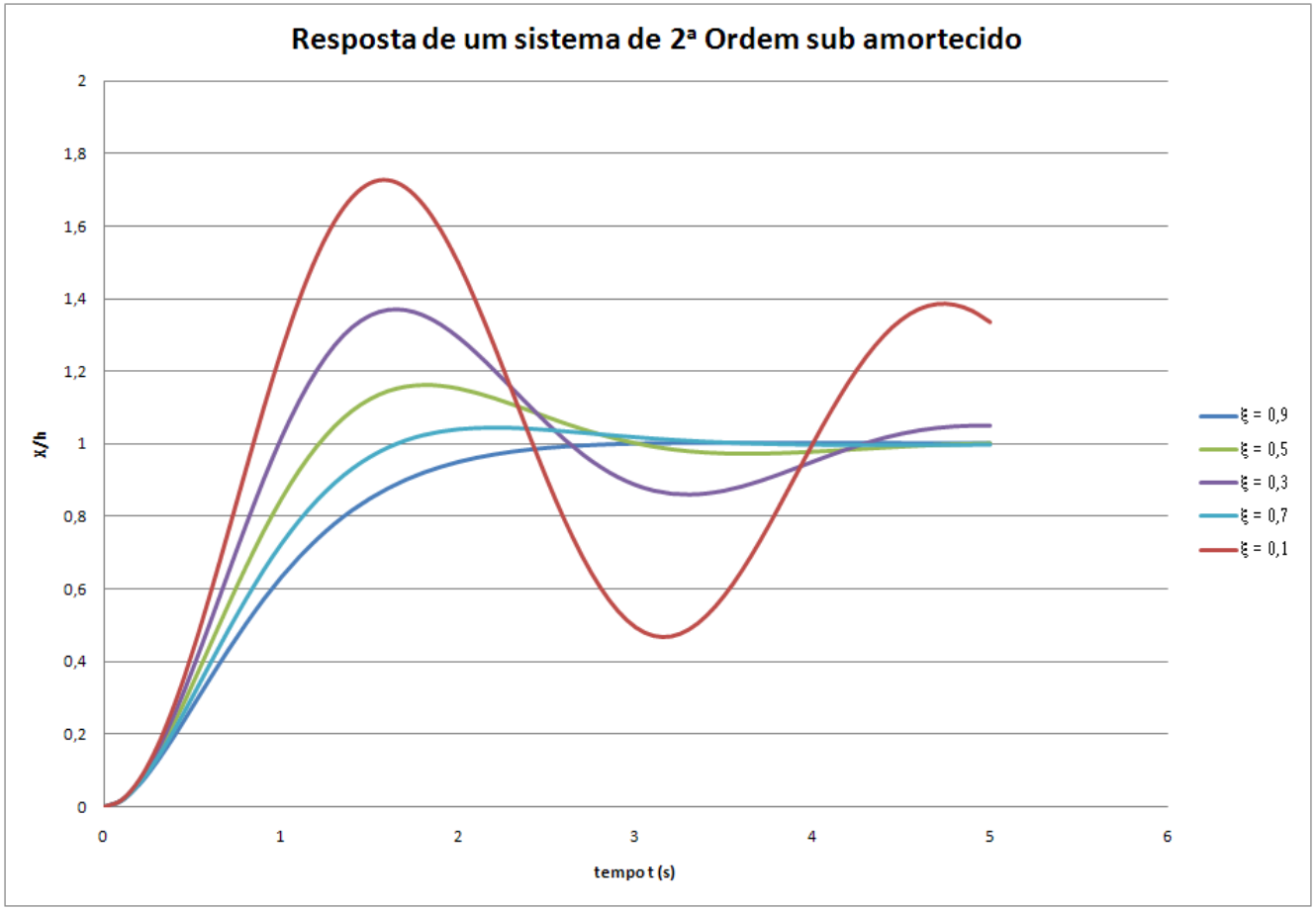
$$-\xi.sen(\phi)+\sqrt{1-\xi^2}\cos(\phi)=0$$

$$tg(\phi)=\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \quad \Rightarrow \phi = arctg(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi})$$

$$C=\frac{-h_s}{sen(\phi)}$$

$$x=C.e^{(-\xi\omega_n).t}.sen(\omega_n.\sqrt{1-\xi^2}t+\phi)+h_s$$

Sistema sub amortecido em forma gráfica



Resposta a função rampa

- Deixada como exercício.

Resposta de Frequência dos Sistemas de 2ª Ordem

- A análise da resposta de frequência é feita apenas para a solução de regime permanente.
- A relação de amplitudes e o desvio de fase são obtidos diretamente da função de transferência senoidal, obtida da função de transferência operacional substituindo o operador D por $i\omega$.

Equação da resposta de frequência de 2ª ordem

$$D^2x + 2.\xi.\omega_n Dx + \omega_n^2.x = \omega_n^2.h_i.sen(\omega.t)$$

Função de transferência operacional

$$\frac{x}{h}(D) = \frac{\omega_n^2}{D^2 + 2.\xi.\omega_n D + \omega_n^2}$$

Função de transferência senoidal

$$\frac{x}{h}(D) = \frac{\omega_n^2}{(i\omega)^2 + 2.\xi.\omega_n i\omega + \omega_n^2}$$ ou $$\frac{x}{h}(D) = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2.\xi.\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)i}$$

A relação de amplitudes é dada por:

$$\frac{Ao}{Ai} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2.\xi.\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right)^2}}$$

Gráfico da amplitude de resposta em função da frequência