Woodrow N. L. Roma
SHS – EESC - USP

INTRODUÇÃO À FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Este texto apresenta uma pequena revisão sobre equações diferenciais lineares ordinárias de coeficientes constantes.

A principal finalidade deste texto é apresentar aos leitores uma forma organizada para obter a solução de equações diferenciais aplicadas aos problemas de instrumentação e análise de sistemas físicos.

1 - REVISÃO MATEMÁTICA

1.1 — O Significado da Equação Diferencial

Uma equação diferencial é simplesmente uma equação envolvendo diferenciais ou derivadas.

Nós temos algumas equações representando leis da natureza, tais como,

$F = m \cdot a$

$E = R \cdot I$

Conservação da. massa

Conservação da. energia

Conservação da quantidade de movimento, etc.

Estas leis podem ser utilizadas para ána1ise de sistemas físicos. Quando nós expressamos a interrelação entre as variáveis de um sistema pela aplicação das leis naturais, resulta em 1 (uma) ou mais equações. Estas equações freqüentemente envolvem derivadas de uma variável com respeito a outra variável. Temos então uma equação diferencial. Se as variáveis dependentes são função de uma única variável independente temos uma equação diferencial ordinária.. No entanto, se as variáveis dependentes dependem de duas ou mais variáveis independentes, as derivadas serão parciais e as equações serão equações diferenciais parciais.

Para ilustrar a obtenção de uma equação diferencial, vamos tomar um exemplo. Imaginemos um tanque, que a partir de um tempo $t = 0$, passa a ser alimentado por uma vazão Q_0 Neste tanque existe um vertedor. Estamos interessados na vazão em função do tempo que é descarregada pelo vertedor, ou em quanto tempo a vazão de saída levará para se igualar à vazão de entrada.

Um sistema real, quando considerado em detalhes, é normalmente, muito complicado e difícil de analisar. Compete, ao engenheiro, fazer simplificações sobre o sistema real, reduzindo a complexidade do problema e obtendo um modelo possível de ser analisado com as ferramentas matemáticas disponíveis. Fica claro que o modelo como uma simplificação de um sistema real não se comportará da mesma maneira. Dessa forma o

comportamento predito matematicamente diferirá um pouco do comportamento real, mas ajudará no entendimento do problema, e a economia de tempo e esforço no estudo analítico, poderá tornar justificável a introdução das simplificações.

Voltando à nossa exposição, vamos supor como simplificação que o tanque é perfeitamente plano, e que a função que liga a carga e a vazão no vertedor seja linear. Assim teremos:

$$Q_V = K \cdot \Delta h \qquad (1.1)$$

em que:

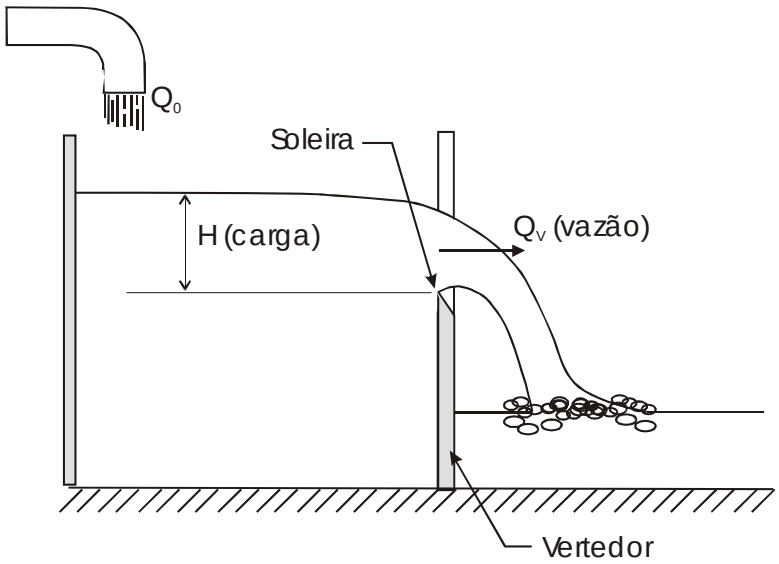
Q_V = vazão do vertedor

Δh = carga no vertedor

Não temos nenhuma lei natural que interligue diretamente, a vazão e o tempo em um sistema, mas sabemos que ela existe, sabemos também, que a conservação da massa rege fenômenos dessa natureza.

Vamos ainda supor que o instante $t = 0$ é quando a água esta na altura da soleira do vertedor.

Então, podemos escrever, para um intervalo de tempo dt



massa que entra no tanque – **massa que sai do tanque** = **variação da massa no tanque**

Ou

$$\rho \cdot Q_0 \cdot dt - \rho \cdot Q_v \cdot dt = dm \qquad (1.2)$$

Em que:

Q_0 é a vazão que entra no sistema

Q_V é a vazão que sai pelo vertedor

Como, por hipótese, a vazão do vertedor é linear com a carga podemos escrever

$$Q_V = K \cdot \Delta h \qquad (1.3)$$

e ainda que a massa do tanque é

$$m_t = \Delta h \cdot \rho \cdot A \qquad (1.4)$$

Portanto, obtemos

$$\rho \cdot Q_0 - \rho \cdot K \cdot \Delta h = \frac{d}{dt} \rho \cdot \Delta h \cdot A \qquad (1.5)$$

Supondo ainda, que a massa específica seja constante no tempo temos:

$$\rho \cdot Q_0 - \rho \cdot K \cdot \Delta h = \rho \cdot A \frac{d\Delta h}{dt} \qquad (1.6)$$

Como, $Q_v = K \cdot \Delta h$, podemos escrever

$$Q_0 - Q_V = \frac{A}{K} \frac{d}{dt} Q_V \qquad (1.7)$$

Esta equação é uma equação diferencial, e é valida para cada instante no intervalo de tempo sob consideração. Esta equação, entretanto, não é uma relação direta entre *Q* e *t*, mas pode ser resolvida e sua solução será a relação desejada

Existem várias maneiras de se obter so1uções práticas para equações diferenciais:

1.1.1 – Métodos Analíticos Exatos

Obtém soluções gerais exatas, que é o tipo de solução preferido.Entretanto, muitas equações obtidas na prática não podem ser resolvidas por tais métodos, ou são muito complicadas de resolver.

1.1.2 – Métodos Numéricos ou Gráficos

Obtém soluções aproximadas utilizando operações elementares. Grande precisão requer muitas repetições das operações. Este método é muito bom para uso em computadores digitais. Estes métodos podem ser aplicados a qualquer tipo de equação diferencial.

1.1.3 – Métodos Analógicos

Utiliza analogia física para dar so1uções aproximadas de equações diferenciais, isto é, muitos sistemas físicos têm a mesma equação diferencial. Este método tem grandes vantagens quando é usado um computador eletrônico digital.

Como a equação diferencial obtida é de fácil solução analítica, podemos resolvê-la. Então, temos:

$$Q_0 - Q_V = \frac{A}{K} \frac{dQ_V}{dt} \quad \text{ou}$$

$$\frac{dQ_V}{Q_0 - Q_V} = \frac{Kdt}{A}$$

que pode ser integrada para obtermos:

$$\ln\left(Q_0 - Q_V\right) = -\frac{K}{A}t + C_0$$

ou $$\left(Q_0 - Q_V\right) = C_1 e^{-\frac{K}{A}.t}$$

ou $$Q_V = Q_0 - C_1 e^{-\frac{K}{A}.t} \qquad (1.8)$$

que é uma relação direta entre Q e t como queríamos.

No entanto, necessitamos mais alguma informação para determinar o valor da constante de integração. Estas informações são dadas, geralmente, na forma de condições de contorno, ou condições iniciais. No nosso exemplo, podemos dizer que quando $t = 0$, a vazão é nula, portanto

$$C_1 = Q_0$$

e a solução fica

$$Q_V = Q_0\left(1 - e^{-\frac{K}{A}.t}\right) \qquad (1.9)$$

que é a equação procurada.

1.2 – <u>Método C1ássico de Solução de uma Equação Diferencial Linear Ordinária com Coeficientes Constantes</u>

No exemplo dado, a equação diferencial era suficientemente simples, para que as variáveis pudessem ser separadas e uma solução obtida por simples integração. Para situações físicas mais complexas, equações diferenciais mais complicadas são obtidas, e este método pode não ser aplicável.

Não existe um método geral para resolver exatamente todas as equações diferenciais. No entanto, as equações podem ser classificadas em tipos, e para certo tipo existe uma forma geral de solução exata. Vamos ver este tipo de equação diferencial que tem ampla aplicação na Ciência e na Engenharia.

A forma geral de uma equação linear com coeficientes constantes é

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{dy}{dx} + a_0 y = f(x) \qquad (1.10)$$

em que:

y - é a variável dependente para a qual queremos a solução,

x - é a variável independente, usualmente o tempo *t* e

a_i - são os coeficientes e representam parâmetros do sistema, tais como, massa, indutância, calor específico etc, ou razões entre eles.

A função *f(x)* é denominada função perturbadora ou excitadora. Ela representa o agente que faz o sistema reagir. A função perturbadora pode ser qualquer função de x, incluindo constantes e o zero. Em instrumentação a função perturbadora representa a variação no tempo da variável a ser medida, e a solução da equação diferencial representa a resposta do instrumento.

Para obter a solução da equação diferencial vamos dividi-la em duas partes, conforme a equação 2.11.

$$y = y_h + y_p \tag{1.11}$$

em que
y_h = solução homogênea, ou complementar, e
y_p = solução particular

A solução homogênea y_h representa a solução transiente do problema, e a solução particular, representa a solução em regime permanente. Estas duas soluções são encontradas independentemente uma da outra. A solução homogênea pode sempre ser encontrada, ela não depende da função perturbadora. Já a solução particular depende da função perturbadora, e para funções muito complicadas, pode ser impossível de determinar. Geralmente, para as situações físicas, temos funções perturbadoras que podem ser resolvidas por método simples.

Solução Homogênea: A solução homogênea é definida como a solução da equação:

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0 \tag{1.12}$$

Fisicamente, esta equação corresponde à ação do sistema quando lhe é fornecida alguma energia inicial, e deixado reagir livremente. A solução desta equação representa o transiente que ocorre ente a situação inicial e a final representada pela função perturbadora. Como a solução homogênea, ou transiente, é solução da equação (1.12) ela terá *n* constantes a determinar.

O método de solução aqui descrito será baseado no operador ***D*** definido como:

$$Dy = \frac{dy}{dx} \tag{1.13}$$

Isto é, *D* operando sobre *y* é igual à derivada de *y* com respeito à *x*. Por exemplo, se $y = 3x^2$

$$Dy = 6x$$

$$D^2 y = 6$$

Podemos, também, definir o operador D^{-1}, tal que

$$D^{-1} = \frac{1}{D} y = \int_0^x y dx \qquad (1.14)$$

Por exemplo $y = \text{sen}\, x$

$$D^{-1} y = \cos x$$

$$D^{-2} y = -\text{sen}\, x$$

$$D^{-3} y = -\cos x$$

A uti1idade desta notação operacional reside no fato de que o símbolo operador ***D*** pode ser tratado como se fosse uma quantidade algébrica. Portanto:

$$D^2 y + 2Dy + 3y = (D^2 + 2D + 3) y$$

$$D(D^3 y + \frac{1}{D}) y = D^4 y + y = (D^4 + 1) y$$

Escrevendo a equação (1.12) na notação usando o operador ***D***, temos

$$\left(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + ... + a_1 D + a_0\right) y = 0 \qquad (1.15)$$

Fazendo a expressão entre parêntesis igual a zero e tratando o operador *D* como se fosse uma incógnita algébrica, temos:

$$a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + ... + a_1 D + a_0 = 0 \qquad (1.16)$$

Esta equação em *D* é chamada equação característica do sistema físico, ela contem todas as informações para descrever o sistema. Esta equação pode ser resolvida e fornecera *n* raízes, denominadas

$$r_1, r_2, r_3 ..., r_n$$

Estas raízes podem ser reais ou complexas, e após determinadas fornecem a solução homogênea que dependerá dos tipos das raízes obtidas:

a) Raízes Reais não Repetidas

Se algumas das raízes são reais e não repetidas, digamos $r_a, r_b, r_c, r_d ...$, a solução homogênea correspondente a essas raízes será:

$$h_{h_1} = C_a \, e^{r_a x} + C_b \, e^{r_b x} + C_c \, e^{r_c x} + C_d \, e^{r_d x} + ... \qquad (1.17)$$

em que C_a, C_b, C_c, C_d, ..., são constantes a determinar.

b) Raízes Reais Repetidas

Se existem raízes repetidas, para cada raiz $\boldsymbol{r_e}$ que aparece $\boldsymbol{p}$ vezes têm-se:

$$h_{h_2} = (C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + ... + C_{p-1} x^{p-1})\, \mathrm{e}^{r_d x} \qquad (1.18)$$

em que C_0, C_1, ...,C_{p-1} são constantes a determinar.

c) Raízes Complexas não Repetidas

Cada par de raízes complexas $a \pm b\,\mathrm{i}$, não repetidas, fornece:

$$y_{h_3} = C\,\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{sen}(bx + \varphi) \qquad (1.19)$$

em que C e φ são constantes a determinar, o número a pode ser positivo, negativo ou zero, mas o número b é sempre positivo.

d) Raízes Complexas Repetidas

Para cada par de raízes complexas $a \pm b\,\mathrm{i}$ que aparece p vezes, teremos:

$$\begin{aligned} y_{h_4} &= C_0\,\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{sen}(bx + \varphi_0) + C_1 x\,\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{sen}(bx + \varphi_1) + ... + \\ &+ C_{p-1} x^{p-1}\,\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{sen}(bx + \varphi_{p-1}) \end{aligned} \qquad (1.20)$$

A solução homogênea $\boldsymbol{y_h}$ será a soma de todas essas partes obtidas.

$$y_h = y_{h_1} + y_{h_2} + y_{h3} + y_{h_4}$$

Solução particular: Vamos considerar agora um método para determinar a solução particular, $\boldsymbol{y_p}$. Este método pode ser aplicado se a função perturbadora tiver um número finito de derivadas.

Uma vez determinado que existe um número finito de derivadas para a função perturbadora, a solução particular será uma combinação linear da função e suas derivadas, e os coeficientes serão constantes a determinar por substituição, isto é:

$$y_p = A.f(x) + B.f'(x) + C.f''(x) + D.f'''(x) + \ldots \qquad (1.21)\ \mathrm{p}$$

Em que $f(x)$ é a função perturbadora.

Os valores numéricos de A, B, C, D,... podem ser determinados imediatamente, substituindo $\boldsymbol{y_p}$ na equação diferencial original.

Como exemplo, vamos obter a solução particular da equação:

$$2\frac{dy}{dx} - 3y = 3x^3 \qquad (1.22)$$

A função perturbadora é

$f(x) = 3x^3$

e suas derivadas podem ser obtidas:

$f'(x) = 9x^2$

$f''(x) = 18x$

$f'''(x) = 0$

portanto temos número finito de derivadas, 2(duas) já que a terceira é nula, então a solução de regime permanente pode ser escrita como:

$$y_p = A.x^3 + B.x^2 + C.x + D$$

Substituindo na equação diferencial, temos:

$$2(3Ax^2 + 2bx + C) - 3(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) = 3x^3 \qquad (1.23)$$

Agrupando os termos de mesmo expoente:

$$-3A.x^3 + (6A - 3B).x^2 + (4B - 3C).x + (2C - 3D) = 3x^3$$

Da igualdade entre dois polinômios vem:

$-3A = 3$	portanto	$A = -1$
$6A - 3B = 0$	portanto	$B = -2$
$4B - 3C = 0$	portanto	$C = -8/3$
$2C - 3D = 0$	portanto	$D = -16/9$

Então a solução de regime permanente fica:

$$y_p = -1x^3 - 2x^2 - \frac{8}{3}x - \frac{16}{9}$$

1.3 – <u>O Princípio da Superposição</u>

Se a função perturbadora $f(x)$ for dada na forma:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + ... + f_n(x) \qquad (1.23)$$

o princípio da superposição diz que para encontrar a solução particular $\boldsymbol{y_p}$, nós podemos considerar cada termo separadamente, obter a solução $\boldsymbol{y_p}$ correspondente a cada termo, e então somá-los para obter a solução $\boldsymbol{y_p}$ completa. Este princípio se aplica somente a equações lineares. Fisicamente, isto significa que se nós conhecemos como o sistema responde a diversos tipos de perturbações distintas, nós também sabemos co mo o sistema responderá a qualquer combinação dessas perturbações aplicadas simultaneamente, isto é, a

presença simultânea de outras funções perturbadoras não afeta a resposta de cada função perturbadora individual.

1.4 – Equações Diferenciais Simultâneas

Existem sistemas físicos onde aparecem mais de uma variável dependente. Para um conjunto de equações diferenciais lineares, simultâneas, de coeficientes constantes, o uso do método do operador *D* leva a um procedimento exatamente análogo ao usado para resolver equações algébricas simultâneas.

Consideremos o exemplo:

$$2\frac{d^2y_1}{dx^2} - 3\frac{dy_1}{dx} + 2y_1 - \frac{dy_2}{dx} = 4x \qquad (1.24)$$

$$\frac{d^2y_2}{dx^2} + 3y_2 - \frac{dy_1}{dx} = \text{sen}(2x) \qquad (1.25)$$

Nenhuma delas pode ser resolvida, pois envolvem duas variáveis dependentes y_1 e y_2. Escritas em forma de operador, temos:

$$(2D^2 - 3D + 2)y_1 - (D)y_2 = 4x \qquad (1.26)$$

$$(-D)y_1 + (D^2 + 3)y_2 = \text{sen}(2x) \qquad (1.27)$$

Podemos considerar agora um sistema algébrico com duas equações e duas incógnitas y_1 e y_2, que pode ser facilmente resolvido:

$$(D^2 + 3)(2D^2 - 3D + 2)y_1 - (D^2 + 3)(D)y_2 = (D^2 + 3)4x$$

$$-(D^2)y_1 + (D^2 + 3)(D)y_2 = D(\text{sen}(2x))$$

Somando, temos:

$$\left[\left(D^2 + 3\right)\left(2D^2 - 3D + 2\right) - D^2\right]y_1 = 12x + 2\cos(2x)$$

$$\left(2D^4 - 3D^3 + 2D^2 + 6D^2 - 9D + 6 - D^2\right)y_1 = 12x + 2\cos(2x)$$

$$\left(2D^4 - 3D^3 + 7D^2 - 9D + 6\right)y_1 = 12x + 2\cos(2x)$$

$$2\frac{d^4y_1}{dx^4} - 3\frac{d^3y_1}{dx^3} + 7\frac{d^2y_1}{dx^2} - 9\frac{dy_1}{dx} + 6y_1 = 12x + 2\cos(2x)$$

Que é urna equação diferencial linear, ordinária, com coeficientes constantes, com uma única variável dependente $\boldsymbol{y_1}$, e desse modo facilmente resolvível para determinar

$$y_1 = y_1(x)$$

De maneira análoga, podemos eliminar e obter uma equação em y_2 e obter:

$$y_2 = y_2(x)$$

Qualquer método de solução de sistemas de equações algébricas simultâneas pode ser aplicado aos sistemas de equações diferenciais, uma vez elas estejam escritas em forma de operador. Quando são muitas equações, o uso de determinantes é conveniente.

1.5 – Aproximações por Séries

Quando a função perturbadora é uma função complexa, e de difícil manipulação, a sua aproximação por uma série, pode ser uma maneira adequada de solução. Se a função deve ser aproximada nas vizinhanças de um ponto, a aproximação por uma série de Taylor é a adequada. A forma da série de Taylor para um ponto x_0, é a seguinte:

$$f(x) = f(x_0) + \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} \frac{x-x_0}{1!} + \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x_0} \frac{(x-x_0)^2}{2!} + \left.\frac{d^3y}{dx^3}\right|_{x=x_0} \frac{(x-x_0)^3}{3!} + \cdots \qquad (1.28)$$

Se a função a ser aproximada é uma função periódica, a aproximação seria por uma série de Fourier. Pode ser mostrado que qualquer função periódica razoavelmente bem comportada pode ser representada por uma soma de senos e cosenos do tipo:

$$F(x) = F_{médio} + \frac{1}{L}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi x}{L}) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{L})\right) \qquad (1.29)$$

Em que $F_{médio}$ = valor médio de $F(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} F(x)dx$ (1.30)

$$a_n = \int_{-L}^{L} F(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \qquad (1.31)$$

$$b_n = \int_{-L}^{L} F(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \qquad (1.31)$$